

Δωδέκατο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad xy'' + 2y' + xy = 0, \quad x > 0$$

- (i) Με την αντικατάσταση $y = \frac{x}{\sin x} z$ να επιλύσετε την εξίσωση (E) και να βρείτε μία λύση y_0 της (E) τέτοια, ώστε $y_0(\frac{\pi}{2}) = 0, y_0'(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- (iii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν φραγμένες λύσεις στα διαστήματα $A = (1, +\infty)$ και $B = (0, 1)$.
- (iv) Υπάρχει λύση της εξίσωσης που να μπορεί να οριστεί στο διάστημα $[0, 1]$;

Θέμα 2

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} y_1'(t) = ay_1(t) + by_2(t) + P_1(t), & t \geq 0 \\ y_2'(t) = cy_1(t) - ay_2(t) + P_2(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

όπου P_1 πολυώνυμο βαθμού n και ο αριθμός μητρώου $n \times n$, P_2 πολυώνυμο βαθμού n και $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και $bc > 0$. Να εξετάσετε την αλήθεια των παρακάτω ισχυρισμών.

- (i) Όλες οι λύσεις $(y_1, y_2)^T$ του διαφορικού συστήματος είναι πολυωνυμικής μορφής (δηλαδή, οι y_1, y_2 είναι πολυώνυμα).
- (ii) Υπάρχει τουλάχιστον μία λύση πολυωνυμικής μορφής.
- (iii) Υπάρχει τουλάχιστον μία λύση ταλαντούμενη.
- (iv) Υπάρχει τουλάχιστον μία μη φραγμένη λύση.

Θέμα 3

Δίνεται η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad p(x)q(x)y'(x) + (p^2(x) + q^2(x))y(x) = \sin^2(r(x)), \quad x \geq 0$$

όπου $r, q : [0, +\infty) \rightarrow [x_0, +\infty)$ και $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $x_0 > 0$.

- (i) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = 0$, να αποδείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης (E) τείνει προς το 0, όταν x τείνει στο $+\infty$.
- (ii) Να αποδείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ